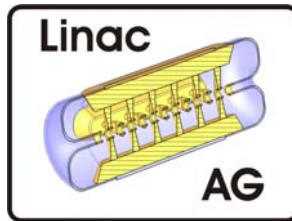


# Netzwerkanalysator

– Messung von S-Parametern –



Institut für Angewandte Physik  
der  
Universität Frankfurt am Main

Autor: Dr. Holger J. Podlech



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen: S-Parameter</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Hochfrequenzbauteile</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Reflexionsfaktor und Smithdiagramm</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Aufgaben</b>	<b>17</b>
4.1	Aufgabenstellungen . . . . .	17
4.2	Hinweise . . . . .	17
<b>A</b>	<b>Leitungsdifferentialgleichungen</b>	<b>23</b>

## Kapitel 1

# Theoretische Grundlagen: S-Parameter

Trifft eine Hochfrequenzwelle auf ein Hochfrequenzbauteil, wird die Welle verändert. Ein Teil der Welle wird reflektiert, ein anderer wird transmittiert. Unter Umständen kommt es zu einer Phasenverschiebung zwischen der Welle, die auf das Bauteil trifft und dem Teil der transmittiert wurde. Die im Praktikum zum Einsatz kommenden Hochfrequenzbauteile sind Koaxialkabel, Resonatoren, Richtkoppler, Verstärker und Abschlüsse. Bei der Untersuchung eines unbekanntes Hochfrequenzbauteils (**DUT**, **Device Under Test**) müssen die Reflexion- und Transmissionseigenschaften bestimmt werden. Sind Reflexions- und Transmissionsverhalten in vor- und rücklaufender Richtung bekannt, kann das DUT mit zwei Anschlüssen vollständig beschrieben werden. Zur Beschreibung werden die sogenannten Streuparameter  $S_{ij}$  verwendet. Die Streuparameter beschreiben den Zusammenhang zwischen einlaufender und auslaufender Welle beim Test eines Mehrtores. Die einlaufende Welle wird durch den Vektor  $\mathbf{a}$  und die auslaufende Welle durch den Vektor  $\mathbf{b}$  beschrieben. Die auslaufende Welle wird natürlich durch die Reflexion- und Transmissionseigenschaften des DUT bestimmt. Die auslaufende Welle ergibt sich durch Multiplikation der einlaufenden Welle mit der sogenannten Streumatrix  $\tilde{\mathbf{S}}$ :

$$\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a} \quad (1.1)$$

Die Transformationsmatrix enthält alle Transformationseigenschaften des zu testenden Gerätes. Für ein  $n$ -Tor ist  $\tilde{\mathbf{S}}$  eine  $n \times n$ -Matrix. In den meisten Fällen ist  $\tilde{\mathbf{S}}$  eine  $2 \times 2$ -Matrix:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich natürlich auch explizit hinschreiben:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \quad (1.3)$$

---


$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \quad (1.4)$$

Damit ergibt sich für  $S_{11}$  und  $S_{21}$ :

$$S_{11} = \frac{b_1 - S_{12}a_2}{a_1} \quad (1.5)$$

$$S_{21} = \frac{b_2 - S_{22}a_2}{a_1} \quad (1.6)$$

Bei einem Test wird im Allgemeinen sichergestellt, dass  $a_2$  null ist. Dann ergibt sich:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (1.7)$$

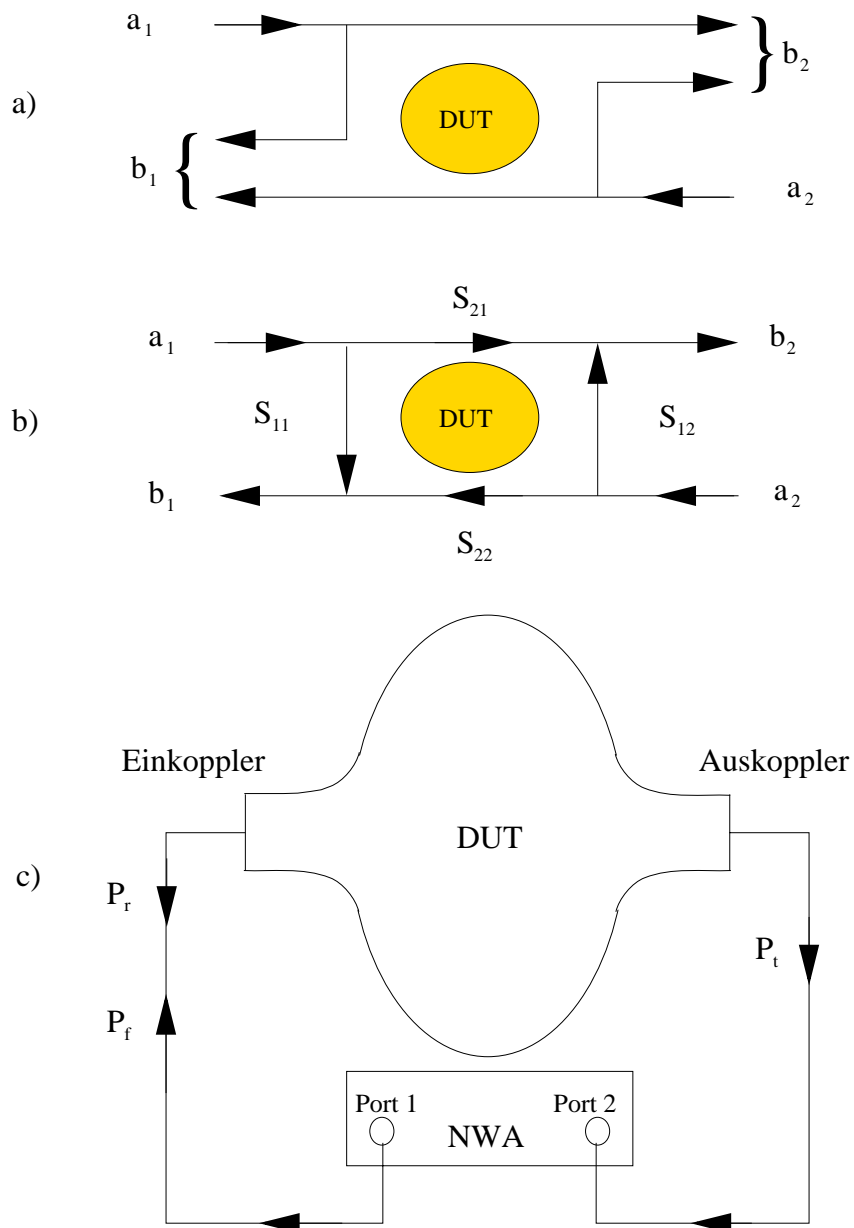
$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (1.8)$$

Die S-Parameter sind also im Wesentlichen Verhältnisse von Wellenamplituden zwischen rücklaufenden und hinlaufenden Wellen. Sie können mittels Netzwerkanalysatoren (NWA) gemessen werden, wobei die Einheit dB ist. Die Abbildung 1.1 zeigt schematisch den Zusammenhang zwischen ein- und auslaufenden Wellen und den S-Parametern eines Zwei-Ports. Der Netzwerkanalysator erzeugt ein Signal, das von Port 1 über ein Koaxialkabel zum DUT geschickt wird. Dieses Signal entspricht der Amplitude  $a_1$ . Am Eingang des DUT kann ein Teil der Welle reflektiert werden. Diese Teilwelle läuft zurück in den Port 1. Gleichzeitig kann eine reflektierte Teilwelle von Port 2 zu dem Ausgang des DUT laufen. Diese Größe  $a_2$  ist aber meist sehr klein und kann hier vernachlässigt werden. Je nach den Transmissionseigenschaften des DUT wird ein mehr oder weniger großer Teil der Welle transmittiert werden. Die Amplitude, die diesen transmittierten Teil der Leistung beschreibt, ist die Größe  $b_2$ , die zum Port 2 läuft.

Da  $a_2$  im Allgemeinen null ist, gilt gemäß 1.7, dass sich  $S_{11}$  ausschließlich als Verhältnis zwischen den Amplituden von reflektierter ( $b_1$ ) und einlaufender Welle ( $a_1$ ) ergibt.  $S_{21}$  ergibt sich mit 1.8 entsprechend als Verhältnis der Amplitude von transmittierter Welle ( $b_2$ ) zu einlaufender Welle ( $a_1$ ).

Netzwerkanalysatoren sind nun in der Lage, zwischen ein- und auslaufenden Wellen an einem Port zu unterscheiden und die entsprechenden Verhältnisse bzw. die S-Parameter zu bestimmen.

Da die Leistung proportional zum Quadrat der Feld- oder Spannungsamplituden ist,



**Fig. 1.1:** Schematischer Zusammenhang zwischen ein- und auslaufenden Wellen und den S-Parametern eines Zwei-Tores.

---

---

ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den S-Parametern und der Leistung:

$$|S_{11}| = \left| \frac{b_1}{a_1} \right| = \sqrt{\frac{P_r}{P_f}} \quad (1.9)$$

$$|S_{21}| = \left| \frac{b_2}{a_1} \right| = \sqrt{\frac{P_t}{P_f}} \quad (1.10)$$

Die Verhältnisse von reflektierter Leistung zur Vorwärtsleistung und von transmittierter Leistung zur Vorwärtsleistung ergeben sich dann durch Quadrieren der S-Parameter:

$$|S_{11}|^2 = \left| \frac{b_1}{a_1} \right|^2 = \frac{P_r}{P_f} \quad (1.11)$$

$$|S_{21}|^2 = \left| \frac{b_2}{a_1} \right|^2 = \frac{P_t}{P_f} \quad (1.12)$$

Im Allgemeinen gibt man die S-Parameter in dB an, es handelt sich also um logarithmische Größen zur Basis 10. Für die Dämpfung  $D$  in dB gilt :

$$D = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \quad (1.13)$$

Da die Leistung quadratisch von der Spannung bzw. der Amplitude abhängt, ergibt sich:

$$D[dB] = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2^2/R_2}{U_1^2/R_1} \right) \quad (1.14)$$

$$D[dB] = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2^2}{U_1^2} \right)_{R_1=R_2} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right)_{R_1=R_2}$$

Wegen 1.14 gibt es keinen Grund zwischen “Spannungs-dB” und “Leistungs-dB” zu unterscheiden. **Die Angabe einer Dämpfung in dB ist eindeutig.** Ein Unterschied ergibt sich nur bei der Berechnung der Leistungsdämpfung  $D_L = P_2/P_1$  und Spannungsdämpfung  $D_U = U_2/U_1$  als Betrag aus der Dämpfung in dB. Wegen  $D_L = D_U^2$  ergeben sich verschiedene Werte. Die Umkehrung von 1.14 liefert z.B. für die Reflexion:

$$|S_{11}| = \sqrt{\frac{P_r}{P_f}} = 10^{S_{11}(dB)/20} \quad (1.15)$$

$$|S_{11}|^2 = \frac{P_r}{P_f} = \left( 10^{S_{11}(dB)/20} \right)^2 = 10^{S_{11}(dB)/10} \quad (1.16)$$

## Kapitel 1. Theoretische Grundlagen: S-Parameter

---

Ein Abschwächung um -10 dB bedeutet also absolut eine Abschwächung der Leistung um den Faktor 10 und der Spannung um  $\sqrt{10} \approx 3.16$ . Ein Abschwächung um -3 dB bedeutet absolut eine Abschwächung der Leistung um den Faktor 2 und der Spannung um  $\sqrt{2} \approx 1.41$ .

Natürlich können Signale auch verstärkt werden ( $D[dB] > 0$ ). In diesem Falle spricht man von Verstärkung oder Gain. Die Beträge der Dämpfungen eines Messaufbaues multiplizieren sich, während sich die Dämpfungen in dB addieren:

$$|D| = \prod_{i=1}^N |D_i| \quad (1.17)$$

$$D[dB] = \sum_{i=1}^N D_i[dB] \quad (1.18)$$

Das Dezibel ist als Verhältnis von Größen dimensionslos. Manchmal ist es aber sinnvoll, eine Bezugsgröße zu definieren. Dann können auch dimensionsbehaftete Größen logarithmisch angegeben werden. Sehr häufig wird dabei das dBm verwendet:

$$\begin{aligned} 0 \text{ dBm} &= 1 \text{ mW} \\ -10 \text{ dBm} &= 0.1 \text{ mW} \\ 20 \text{ dBm} &= 100 \text{ mW} \end{aligned}$$

Beispiel: Ein Verstärker besitzt eine maximale Eingangsleistung von -20 dBm und eine Verstärkung von +63 dB. Wie groß ist die maximale Ausgangsleistung in Watt? Zunächst können wir sofort die Ausgangsleistung in dBm angeben:  $P = +43$  dBm. Die Umrechnung in Watt ergibt sich durch:

$$P[W] = 1 \text{ mW}/1000 \cdot 10^{+43/10} = 20 \text{ W}$$



## Kapitel 2

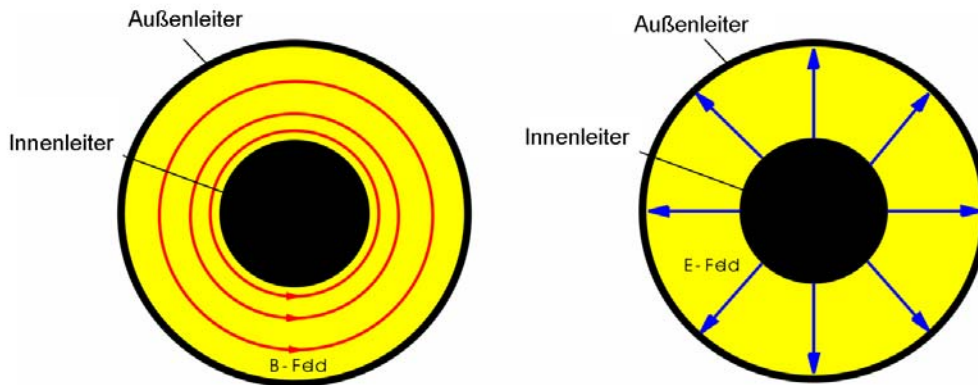
# Hochfrequenzbauteile

Im Praktikumsversuch kommen verschiedenste passive und aktive Hochfrequenzbauteile zum Einsatz:

- Hochfrequenzkabel (passiv)
- Dämpfungen (passiv)
- Richtkoppler (passiv)
- Bandpass (passiv)
- Kurzschluss (passiv)
- Abschluss (passiv)
- Hochfrequenzverstärker (aktiv)

### Hochfrequenzkabel

Hochfrequenzkabel besitzen meist eine zylindersymmetrische Anordnung eines Innen- und eines Außenleiters. Dazwischen befindet sich ein Dielektrikum. In dem Kabel breitet sich entsprechend den Randbedingungen eine Transversal-Elektrisch-Magnetische (TEM)-Welle aus, die ausschließlich transversale Komponenten besitzt. Die Abbildung 2.1 zeigt die Feldverteilung für magnetisches und elektrisches Feld. Der Leistungstransport durch ein Kabel ist verlustbehaftet, die Welle ist entsprechend gedämpft. Im Allgemeinen nimmt die Kabeldämpfung mit der Frequenz zu (warum?).



**Fig. 2.1:** Schnitt durch ein Hochfrequenzkabel mit magnetischem und elektrischem Feld der TEM-Mode.

---

Die Impedanz  $Z$  eines Kabels hängt von seiner Geometrie ab. Für ein verlustloses Kabel gilt:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0 (\ln(b/a))^2}{4\pi^2 \epsilon_0}} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (2.1)$$

Dabei ist  $b$  der Radius des Außenleiters und  $a$  der des Innenleiters. Die meisten Kabel besitzen eine Impedanz von  $50 \Omega$ . Für das geforderte Verhältnis der Radien ergibt sich aus 2.1:

$$50 \Omega = 60 \ln(b/a)$$

$$b/a \approx 2.3$$

### Dämpfungen

Neben unerwünschten Dämpfungen in Kabeln gibt es auch speziell hergestellte Dämpfungsglieder, die eine definierte Dämpfung über einen weiten Frequenzbereich besitzen. Diese sind z.B. notwendig, um zu starke Hochfrequenzsignale vor dem Eingang in einen Netzwerkanalysator abzuschwächen.

### Richtkoppler

In einem Richtkoppler wird ein kleiner Teil der Leistung einer Hochfrequenzwelle ausgekoppelt, also "abgezweigt". Bei hinreichend kleiner Auskopplung ( $< -20$  dB)

---

bleibt die Hauptwelle praktisch unbeeinflusst. Das ausgekoppelte Signal wird typischerweise für Diagnose und Signalverarbeitung verwendet.

### **Bandpass**

Ein Bandpass ist im Prinzip ein Schwingkreis, der in einem bestimmten Frequenzintervall durchlässig für Hochfrequenz ist.

### **Abschluss**

Der Abschluss einer Leitung ist im Prinzip ein Verbraucher, der den gleichen Wellenwiderstand bzw. Impedanz hat wie die Leitung selbst. Sind die Impedanzen exakt gleich, spricht man von Anpassung. Bei Anpassung gibt es keine Reflexion und es gilt  $|S_{11}| = 0$ .

### **Offenes Kabelende**

Ein offenes Kabelende besitzt einen unendlich hohen Impedanz. Die gesamte Leistung wird reflektiert und es gilt  $|S_{11}| = 1$  (unter Vernachlässigung der Kabeldämpfung).

### **Kurzschluss**

Ein Kurzschluss als Kabelende besitzt eine Impedanz von null. Die gesamte Leistung wird reflektiert und es gilt  $|S_{11}| = 1$  (unter Vernachlässigung der Kabeldämpfung).

### **Verstärker**

Ein Hochfrequenzverstärker verstärkt eine Hochfrequenz um einen bestimmten Faktor. Meist wird der Verstärkungsfaktor logarithmisch in dB als Gain angegeben. Ein Verstärker wird charakterisiert durch den Gain, die maximale Ausgangsleistung und die Bandbreite. Je nach Anwendung gibt Verstärker von sub- $\mu$ W bis in den Multi-MW-Bereich.

## Kapitel 3

# Reflexionsfaktor und Smithdiagramm

Breitet sich eine Welle vom Generator durch ein Hochfrequenzkabel aus, trifft sie am Kabelende auf eine Abschlusslast. Diese kann Werte von 0 bis unendlich annehmen. Ist die Lastimpedanz nicht exakt gleich mit der Impedanz des Kabels, wird ein mehr oder weniger großer Teil der Welle reflektiert. Streng genommen muss die Abschlusslast genauso groß sein wie die Impedanz  $Z_i$  des Systems Generator+Kabel. Im Folgenden gehen wir aber davon aus, dass Generator und Kabel die gleiche Impedanz haben. Die hier kurz aufgezeigten Zusammenhänge werden im Anhang A hergeleitet.

Strom und Spannung in einem Hochfrequenzkabel sind ortsabhängig. Die allgemeinen Lösungen für die Spannung und den Strom lauten:

$$U(z) = U_f e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z} \quad (3.1)$$

$$I(z) = \frac{U_f}{Z_L} e^{-\gamma z} - \frac{U_r}{Z_L} e^{\gamma z} \quad (3.2)$$

Dabei sind die mit f indizierten Größen die Amplitude des vorlaufenden Wellenterms (forwarded) und die mit r indizierten Größen die Amplitude des zurücklaufenden Wellenterms (reflected). Die komplexe Zahl  $\gamma$  heißt Ausbreitungsfaktor:

$$\gamma = \alpha + i\beta = \sqrt{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')}. \quad (3.3)$$

Der Realteil  $\alpha$  heißt Dämpfungskonstante und der Imaginärteil  $\beta$  Phasenkonstante. Die gestrichelten Größen sind die sogenannten Beläge wie z.B. Widerstandsbelag  $R'$  ( $\Omega/m$ ) oder Kapazitätsbelag  $C'$  ( $F/m$ ). Die Größe  $Z_L$  heißt **Wellenwiderstand**.  $Z_L$  ist derjenige Widerstand, mit dem die Leitung abgeschlossen werden muss, damit nur eine vorlaufende Welle, also keine Reflexion auftritt.

$$Z_L = \sqrt{\frac{(R' + i\omega L')}{(G' + i\omega C')}} \quad (3.4)$$

---

Man definiert den komplexen Reflexionsfaktor  $\rho(z)$  als Verhältnis der rücklaufenden zur vorlaufenden Spannungswelle:

$$\rho(z) = \frac{U_r(z)}{U_f(z)} \quad (3.5)$$

Aus praktischen Gründen wählt man meist  $z = 0$  als den Ort des Abschlusses und  $z = -l$  als den Ort des Generators mit  $\rho_0 = \rho(0)$ .

$$\rho(z) = \frac{U_r(z)}{U_f(z)} = \frac{U_r e^{\gamma z}}{U_f e^{-\gamma z}} = \frac{U_r}{U_f} e^{2\gamma z} = \rho_0 e^{2\gamma z} \quad (3.6)$$

Aus 3.6 ist ersichtlich, dass es zu einer Phasendrehung des Reflexionsfaktors in der komplexen Ebene mit der Periodizität  $\pi$  bzw.  $\lambda/2$  kommt. Eine Phasenänderung kann verschiedene Ursachen haben:

$$\Delta\varphi \propto \begin{cases} \Delta t \\ \Delta l \\ \Delta f \end{cases} \quad (3.7)$$

Wir betrachten eine Phasendrehung aufgrund einer Frequenzdifferenz:

$$\Delta\varphi = \Delta\omega t = 2\pi\Delta f t \quad (3.8)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta f 2l}{v} = \frac{2\pi\epsilon_r \Delta f 2l}{c} \quad (3.9)$$

Die Zwei im Zähler von 3.9 liegt in der Gesamtstrecke begründet, die die Welle beim Vor- und Zurücklaufen zurücklegt. Dies ist auch der anschauliche Grund für die doppelte Phasenrotation mit der Periode  $\pi$ .  $v$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Kabel,  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit und  $\epsilon_r$  die Dielektrizitätszahl des Dielektrikums. Ist die Leitung angepaßt oder unendlich lang, läuft die Welle ungehindert weiter. Eine Fehlanpassung, z.B. ein ein offenes Ende ( $Z = \infty$ ) führen zu Reflexion. Wir betrachten nun solche Kabellängen, die  $\lambda/4$  bzw. eine Phasendrehung um  $\pi$  entsprechen. Gleichung 3.9 ergibt dann:

$$\pi = \frac{2\pi\epsilon_r \Delta f 2l}{c} \quad (3.10)$$

Bei bekanntem Dielektrikum können wir also aufgrund einer Phasenmessung zwischen vor- und rücklaufender Welle die Kabellänge bestimmen. Praktisch wird

### Kapitel 3. Reflexionsfaktor und Smithdiagramm

---

die Frequenzdifferenz  $\Delta f$  gemessen, die zu eine Phasenverschiebung von  $\pi$  führt. Auflösen von 3.10 ergibt:

$$l = \frac{c}{4\epsilon_r \Delta f} \quad (3.11)$$

Dazu wird das Kabel mit offenem Ende an Port 1 des Netzwerkanalysators geschraubt. Dann wird die Stop- und Startfrequenz so eingestellt, dass bei der Phasenmessung mindestens 180 grad Differenz auftritt. Die entsprechende Frequenzdifferenz wird gemessen. Diese Methode eignet sich auch zum Bestimmen der Position eines Kabelbruchs.

Aus dem Reflexionsfaktor lassen sich aber noch wesentlich mehr Informationen gewinnen. Dazu schreiben wir für die Spannung und den Strom:

$$U(z) = U_f(z) + U_r(z) = U_f(z) \left( 1 + \frac{U_r(z)}{U_f(z)} \right) = U_f(z) (1 + \rho(z)) \quad (3.12)$$

$$I(z) = I_f(z) + I_r(z) = \frac{U_f(z)}{Z_L} \left( 1 - \frac{U_r(z)}{U_f(z)} \right) = \frac{U_f(z)}{Z_L} (1 - \rho(z)) \quad (3.13)$$

$$U(z) = U_f(z)(1 + \rho(z)) = U_f e^{-\gamma z} (1 + \rho_0 e^{2\gamma z}) \quad (3.14)$$

$$I(z) = \frac{U_f(z)}{Z_L} (1 - \rho(z)) = \frac{U_f e^{-\gamma z}}{Z_L} (1 - \rho_0 e^{2\gamma z}) \quad (3.15)$$

Für die Impedanz  $Z_i$  des Kabels gilt dann:

$$Z_i(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = (1 + \rho(z)) = Z_L \left( \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \right) = Z_L \left( \frac{1 + \rho_0 e^{2\gamma z}}{1 - \rho_0 e^{2\gamma z}} \right) \quad (3.16)$$

Meist verwendet man die normierte Impedanz  $z_i(z)$ :

$$z_i(z) = \frac{Z_i(z)}{Z_L} \quad (3.17)$$

Daraus folgt:

$$z_i(z) = \left( \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \right) = \left( \frac{1 + \rho_0 e^{2\gamma z}}{1 - \rho_0 e^{2\gamma z}} \right) \quad (3.18)$$

Auflösen nach  $\rho$  ergibt:

$$\rho(z) = \frac{z_i(z) - 1}{z_i(z) + 1} = \frac{Z_i(z) - Z_L}{Z_i(z) + Z_L} \quad (3.19)$$

Durch 3.18 und 3.19 ist der Reflexionsfaktor eindeutig mit der Impedanz verknüpft. Die Abbildung 3.19 bildet die rechte Halbebene des komplexen Z-Raums eindeutig

---

auf das innere des Einheitskreises des  $\rho$ -Raums ab. Da es für passive Bauelemente keine negativen Ohmschen Anteile der Impedanz gibt, ist die rechte Halbebene ausreichend. Das zugehörige Diagramm heißt **Smithdiagramm**. Im Folgenden sollen die Form der Linien für konstanten  $Re(Z)$  und konstanten  $Im(Z)$  hergeleitet werden. Zunächst spalten wir die komplexen Größen  $\rho$  und  $Z$  in Real- und Imaginärteil auf:

$$\rho = \rho_r + i\rho_i \quad (3.20)$$

$$Z = r + ix \quad (3.21)$$

Mit 3.18 erhalten wir:

$$\begin{aligned} z &= r + ix = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{1 + \rho_r + i\rho_i}{1 - \rho_r - i\rho_i} \\ &= \frac{[(1 + \rho_r) + i\rho_i][(1 - \rho_r) + i\rho_i]}{[(1 - \rho_r) - i\rho_i][(1 - \rho_r) + i\rho_i]} \\ &= \frac{1 - \rho_r^2 - \rho_i^2 + i2\rho_i}{(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2} \\ &= \frac{1 - \rho_r^2 - \rho_i^2}{(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2} + \frac{i2\rho_i}{(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Durch Vergleich erhalten wir:

$$r = \frac{1 - \rho_r^2 - \rho_i^2}{(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2} \quad (3.23)$$

$$x = \frac{2\rho_i}{(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2} \quad (3.24)$$

Multiplizieren von 3.22 mit  $(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2$  ergibt:

$$r [(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2] + i2\rho_i = 1 - \rho_r^2 - \rho_i^2 + i2\rho_i$$

$$r [(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2] = 1 - \rho_r^2 - \rho_i^2$$

$$r - 2r\rho_r + r\rho_r^2 + r\rho_i^2 = 1 - \rho_r^2 - \rho_i^2$$

$$\rho_r^2(1 + r) - 2r\rho_r + \rho_i^2(1 + r) = 1 - r$$

### Kapitel 3. Reflexionsfaktor und Smithdiagramm

---

$$\rho_r^2 - \frac{2r\rho_r}{1+r} + \rho_i^2 = \frac{1-r}{1+r}$$

$$\rho_r^2 - \frac{2r\rho_r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 + \rho_i^2 = \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 \quad (3.25)$$

Die Gleichung 3.25 ist eine Binomische Formel:

$$\left(\rho_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \rho_i^2 = \frac{1}{(1+r)^2} \quad (3.26)$$

Die analoge Rechnung für den Imaginärteil  $x$  der Impedanz ergibt:

$$(\rho_r - 1)^2 + \left(\rho_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (3.27)$$

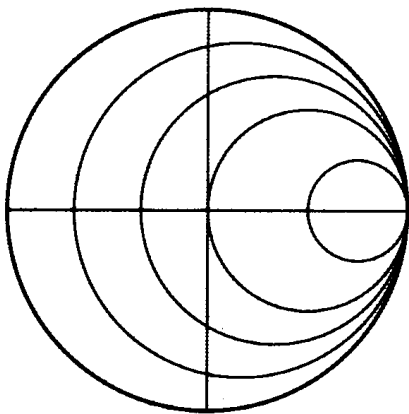
3.26 und 3.27 sind **Kreisgleichungen** vom Typ

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

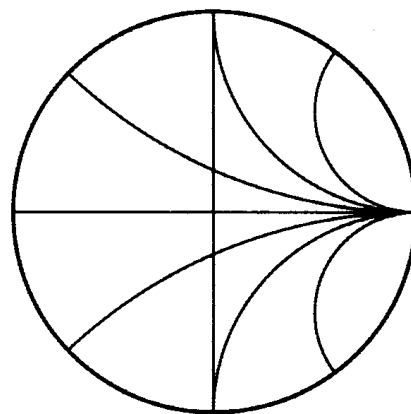
Die Kurven für  $r = \operatorname{Re}(z) = \text{const}$ , also mit konstantem Wirkanteil sind Kreise, deren Kreismittelpunkte auf der positiven  $\rho_r$ -Achse bei  $\rho_r = \frac{r}{1+r}$  liegen. Die Radien betragen  $\frac{1}{1+r}$ . Die Kurven für  $x = \operatorname{Im}(z) = \text{const}$ , also mit konstantem Blindanteil sind Kreise, deren Mittelpunkte auf Geraden mit  $\rho_r = 1$  und  $\rho_i = \pm\frac{1}{x}$  liegen, der Radius ist  $\frac{1}{x}$ .

Die Abbildung 3.19 ist konform, d.h. winkeltreu. In der Abbildung 3.1 sind einige der Kreise für  $\operatorname{Re}(Z)$  und  $\operatorname{Im}(Z)$  getrennt eingezeichnet. Der Reflexionsfaktor lässt sich als Abstand vom Mittelpunkt ablesen. Durch die Verlängerung der Linie Mittelpunkt-Impedanz bis zum Rand lässt sich der Phasenwinkel ablesen. Die Abbildung 3.2 zeigt ein typisches Smithdiagramm.





(a)  $\text{Re}\{z\} = \text{const}$



(b)  $\text{Im}\{z\} = \text{const}$

Fig. 3.1: Kreise für konstante  $\text{Re}(Z)$  und  $\text{Im}(Z)$ .

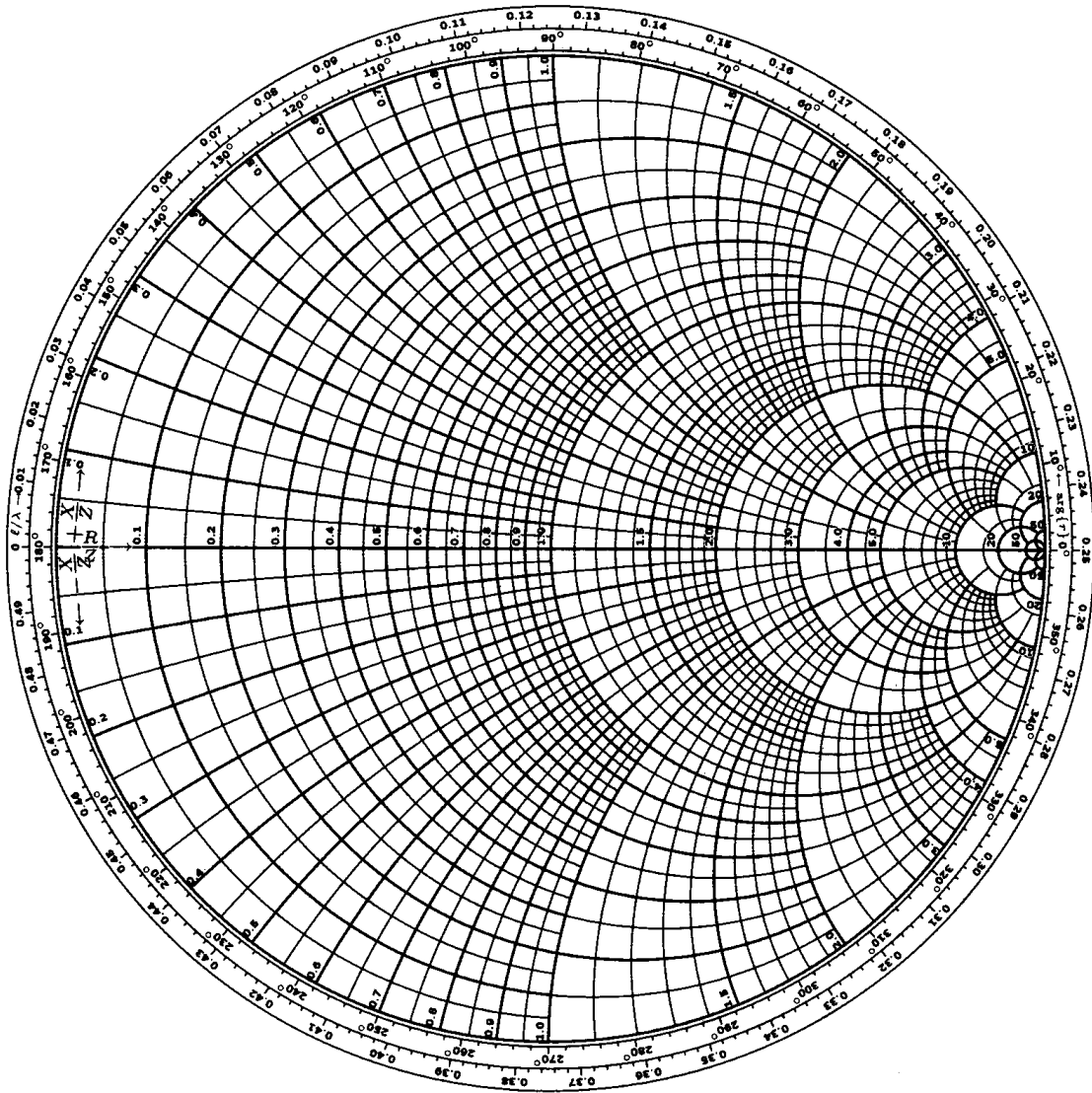


Fig. 3.2: Smithdiagramm.

# Kapitel 4

## Aufgaben

### 4.1 Aufgabenstellungen

1. Führen Sie eine Kalibrierung des Analysators durch, um Kabeldämpfungen zu berücksichtigen.
2. Messen Sie verschiedene Kabeldämpfungen.
3. Messen Sie die Dämpfungen verschiedener unbekannter Dämpfungsglieder bei unterschiedlichen Frequenzen.
4. Messen Sie das Durchgangsspektrum von 2 Richtkopplern.
5. Messen Sie die Frequenzgänge zweier Hochfrequenzverstärker.
6. Messen Sie die Kabellänge zweier unbekannter Kabel mit dem Phasen- und Smithdiagramm.
7. Bestimmen Sie die Dielektrizitätszahl eines unbekanntes Kabels mit dem Smithdiagramm.
8. Messen Sie das Smithdiagramm für ein Kabel, ein offenes Ende, einen  $50\Omega$ -Abschluss und einen Kurzschluss.

### 4.2 Hinweise

Die Hinweise beziehen sich auf die Bedienung des Netzwerkanalysators und die Inhalte der Messungen. Bei der Gerätebeschreibung gilt Folgendes:

- Ein großgeschriebenes **WORT** bedeutet, dass dieser Knopf zu drücken ist.
- **M-WORT** bedeutet, dass der jeweilige Menüknopf direkt rechts vom Bildschirm zu drücken ist
- Der Netzwerkanalysator gibt die Werte der Impedanz in absoluten Zahlen aus, während das gedruckte Smithdiagramm (s. Abb. 3.2) die Impedanz normiert auf  $50 \Omega$  darstellt, d.h. der Wert 0.5 im gedruckten Diagramm entspricht  $25 \Omega$ .

### Hinweis zu Aufgabe 1:

Sie verwenden den Netzwerkanalysator HP 8720 A. Dieser hat einen Messbereich von 130 MHz bis 20 GHz. Am Anfang einer Messung muss der Analysator kalibriert werden. Je nach Messung und notwendiger Genauigkeit stehen verschiedene Kalibriermethoden zur Verfügung. Für den Praktikumsversuch sind die einfachsten Kalibrierungen für Transmission (Response-Kalibrierung) bzw. Reflexion (1-port-Kalibrierung) ausreichend. Für die Transmissionskalibrierung verbinden Sie 2 jeweils 0.5 m lange SMA-Kabel und schrauben das verbundene Kabel an Port 1 und Port 2 des Analysators. Dann drücken Sie folgende Tasten:

**CH-1, MEAS, M-S21, START, 130, M/ $\mu$ , STOP, 1000, M/ $\mu$ , SCALE, AUTOSCALE.**

Dann folgt die Kalibrierung in Transmission:

**CAL, M-CALIBRATE MENU, M-RESPONSE, M-THROUGH, M-DONE, M-SAVE-REG1, SCALE, 1, X1, MKR, M-1.**

Sie sehen nun eine konstante Linie des  $S_{21}$ -Parameters mit dem Wert  $S_{21}=0$ . Durch die Kalibrierung wurde im Frequenzintervall von 130 MHz bis 1000 MHz die Dämpfung der Kabel „herausgerechnet“. Die entsprechende Korrekturfunktion wurde in der Datei 1 gespeichert. Wenn Sie nun ein unbekanntes Bauteil in Transmission vermessen, spielen die Zuleitungskabel keine Rolle und können die Messung nicht verfälschen.

**ACHTUNG!!!:** Falls Sie den Span oder die Frequenz ändern, wird dieser Kalibrierfaktor ausgesetzt.. Im Display erscheint „Correction off“. Um den Kalibrierfaktor wieder zu verwenden, müssen Sie folgendes tun: **CAL, M-CORRECT on**. Dies funktioniert aber nur, wenn das aktuelle Frequenzintervall identisch mit dem Intervall während der Kalibrierung ist. Ist dies nicht der Fall, müssen Sie mit dem neuen Intervall erneut kalibrieren. Merken Sie sich, welche beiden Kabel Sie kalibriert haben und als Messkabel verwenden möchten.

### Hinweis zu Aufgabe 2:

Fügen Sie ein 1 m langes SMA-Kabel zwischen die beiden Messkabel ein und messen Sie  $S_{21}$  bei 200 MHz, 400 MHz, 600 MHz und 800 MHz. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

#### **MKR, M-1, 200, M/μ**

Oben rechts im Display erscheint der gemessene Wert von  $S_{21}$ . Wiederholen Sie die Messung durch Einfügen von insgesamt 3 x 1 m langen SMA-Kabeln. Tragen Sie die Dämpfung als Funktion der Frequenz auf. Tragen die Dämpfung als Funktion der Kabellänge auf. Jedes Diagramm besteht aus 4 Kurven. Tragen Sie die transmittierte Leistung als Funktion der Kabellänge auf. Dazu müssen Sie den Betrag von  $S_{21}$  berechnen, der den Bruchteil der transmittierten Leistung angibt:

$$|S_{21}|^2 = 10^{S_{21}(dB)/10}$$

### Hinweis zu Aufgabe 3:

Messen Sie die Dämpfung von drei unbekanntem Dämpfungsgliedern (Attenuator). Fügen Sie dazu je ein unbekanntes Dämpfungsglied (A, B und C) zwischen Ihre beide Messkabel ein und gehen Sie vor wie in Aufgabe 2. Hängt die Dämpfung von der Frequenz ab?

### Hinweis zu Aufgabe 4:

Messen Sie die Koppeldämpfung von zwei unbekanntem Richtkopplern (Bi-directional coupler) bei einer Frequenz von 300 MHz. Verbinden Sie Port 1 des Analysators mit dem Hochfrequenzeingang (RF in) eines Kopplers. Verbinden Sie den Auskoppelpport (FWD) des Kopplers mit Port 2 des Analysators. Schließen Sie die beiden offenen Ports mit  $50 \Omega$  ab. Messung von  $S_{21}$ . Hängt die Koppeldämpfung im Bereich von 130 MHz bis 1000 MHz von der Frequenz ab? Was passiert, wenn Sie die Ausgänge nicht mit  $50 \Omega$  abschließen?

### Hiweis zu Aufgabe 5:

Messen Sie die Verstärkung von zwei unbekanntem Verstärkern (Amplifier) bei 200 MHz, 400 MHz, 600 MHz und 800 MHz. Fügen Sie dazu einen unbekanntem Verstärker zwischen Ihre beiden Messkabel ein und messen Sie  $S_{21}$  im Bereich von 130 MHz bis 1000 MHz. Zeichnen Sie das Spektrum qualitativ auf.

### Hinweis zu Aufgabe 6:

Verbinden Sie das Kabel unbekannter Länge (**Modul A**) direkt mit dem Port 1 des Analysators. Dann messen Sie die Phase:

**MEAS, M-S11, FORMAT, M-PHASE, SCALE, M-AUTOSCALE, START, XXX, STOP, M/μ, YYY, M/μ, MKR**

XXX und YYY sind zwei Frequenzen, die so gewählt werden müssen, dass der komplette Phasengang von  $-180^\circ$  bis  $+180^\circ$  dargestellt wird. Dann bestimmen Sie mit dem Marker die beiden Frequenzen, die einer Phasendifferenz von  $\pi$  bzw.  $180^\circ$  entsprechen. Die Berechnung der Kabellänge erfolgt mit 3.11.

Danach messen Sie die Reflexion im Smithdiagramm für ein weiteres Kabel (**Modul E**):

**MEAS, M-S11, FORMAT, M-SMITH, SCALE, M-AUTOSCALE, START, XXX, STOP, M/μ, YYY, M/μ, MKR**

XXX und YYY sind zwei Frequenzen, die so gewählt werden müssen, dass die Impedanzkurve im Smithdiagramm genau zwei Mal die reelle Achse schneidet. Die Frequenz der beiden Schnittpunkte lässt sich bestimmen durch die Aktivierung des Markers wie in den vorangegangenen Aufgaben. Durch Drehen am Drehknopf lässt sich der Marker auf die Schnittpunkte verschieben. Bestimmen Sie die Frequenzdifferenz der beiden Schnittpunkte und damit die Kabellänge. Die Dielektrizitätszahl des Kabeldielektrikums von Kabel A und E ist  $1.5 \pm 0.05$ .

### Hinweis zu Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Dielektrizitätszahl eines unbekanntem Kabels (Modul B). Das Kabel hat eine Länge von 1 m. Gehen Sie ansonsten so vor wie in Aufgabe 6.

**Hinweis zu Aufgabe 8:**

Messen Sie das Smithdiagramm eines Kabels. Befestigen Sie dazu ein 0.5 m langes SMA-Kabel mit Port 1 des Analysators (offenes Ende). Messen Sie das Smithdiagramm im Frequenzbereich zwischen 130 MHz und 200 MHz. Danach befestigen Sie nacheinander einen Kurzschluss und einen Abschluss (50  $\Omega$ ) am Kabelende. Zeichnen Sie alle drei Kurven in das Smithdiagramm ein.

Entfernen Sie das Kabel und führen eine sogenannte 1-port Kalibrierung durch. Drücken Sie folgende Tasten:

**CAL, M-CALIBRATE MENU, M-S11-1PORT, OPEN**

Dann schließen Sie einen Kurzschluss an Port 1:

**M-SHORT**

Dann schließen Sie einen Abschluss an Port 1:

**M-LOADS, M-BROADBAND, M-DONE LOADS, M-DONE-1PORT CAL**

Der Analysator berechnet dann die Korrekturkoeffizienten. Dann messen Sie das Smithdiagramm für ein offenes Ende, einen Kurzschluss und einen Abschluss. Tragen Sie die Kurven in das Smithdiagramm ein. Wie sieht das Smithdiagramm eines idealen offenen Endes und eines idealen Kurzschlusses aus?

### **Hinweis zu allen Aufgaben:**

Geben Sie den Fehler in Ihren Messungen an. Welche Größen gehen jeweils in die Fehlerbetrachtung ein? Was sind sinnvolle Annahmen für die Fehler der einzelnen Messgrößen?

### **Achtung**

Die Messgeräte und Hochfrequenzbauteile sind **hochempfindlich** und **sehr teuer!** Um Schäden durch statische Entladung zu vermeiden, fassen Sie niemals direkt in die offenen Anschlüsse von Netzwerkanalysatoren oder Oszilloskopen. Verwenden Sie **NIEMALS** beide Verstärker gleichzeitig. Bedienen Sie die Geräte erst nach gründlicher Einweisung.



## Anhang A

# Leitungsdifferenzialgleichungen

Die Leitungstheorie beschreibt die Wellenausbreitung längs von Leitungen. Die zentralen Begriffe sind Ausbreitungsfaktor und Wellenwiderstand. Zunächst sind wir am Verhalten von Strom und Spannung entlang der Leitung interessiert. Die Abbildung A.1 zeigt das Ersatzschaltbild eines infinitesimalen Stücks der Länge  $\Delta z$  einer Leitung. Die Leitung wird charakterisiert durch sogenannte Leitungsbeläge,

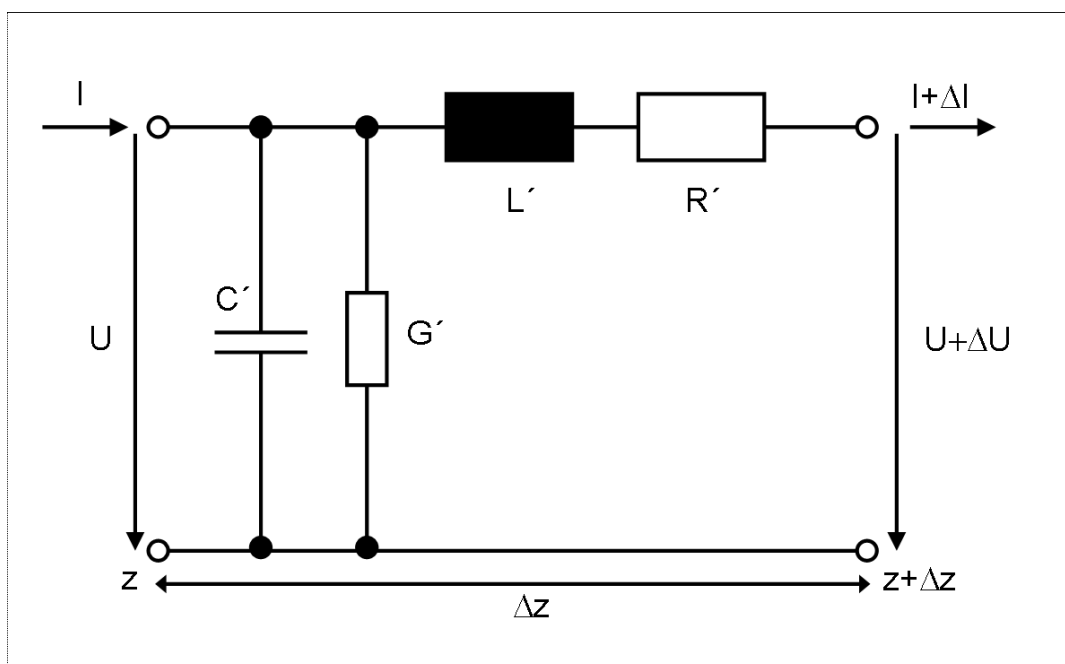


Fig. A.1: Ersatzschaltbild eines Hochfrequenzkabels.

also Größen pro Längeneinheit:

- $R'$  = Widerstandsbelag

## Anhang A. Leitungsdifferenzialgleichungen

---

- $G'$ =Ableitungsbelag
- $L'$ =Induktivitätsbelag
- $C'$ =Kapazitätsbelag

Durch die Einwirkungen der Ersatzschaltbildgrößen verändert sich der Strom  $I$  und die Spannung entlang der Leitung:

$$I(z + \Delta z) = I + \Delta I \quad (\text{A.1})$$

$$U(z + \Delta z) = U + \Delta U \quad (\text{A.2})$$

Die Maschenregel liefert für den Spannungsumlauf im Uhrzeigersinn:

$$-U + (I + \Delta I)R'\Delta z + L'\frac{\partial}{\partial t}(I + \Delta I)\Delta z + (U + \Delta U) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$-\frac{\Delta U}{\Delta z} = (I + \Delta I)R' + L'\frac{\partial}{\partial t}(I + \Delta I) \quad (\text{A.4})$$

Durch Grenzwertbildung erhält man:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = IR' + L'\frac{\partial I}{\partial t} \quad (\text{A.5})$$

Entsprechend ergibt sich mit der Knotenregel (plus bedeutet zulaufender Strom):

$$I - UG'\Delta z - C'\frac{\partial U}{\partial t}\Delta z - I - \Delta I = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = UG' + C'\frac{\partial U}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

Die Gleichungen A.5 und A.7 sind gekoppelte Differenzialgleichungen. Die Differenzierung nach  $z$  liefert:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = R'\frac{\partial I}{\partial z} + L'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) \quad (\text{A.8})$$

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = G'\frac{\partial U}{\partial z} + C'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) \quad (\text{A.9})$$

Da sowohl der Strom als auch die Spannung stetig und differenzierbar sind können wir die Reihenfolge der Differentiation ändern:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = R'\frac{\partial I}{\partial z} + L'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial z}\right) \quad (\text{A.10})$$

---


$$-\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = G' \frac{\partial U}{\partial z} + C' \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (\text{A.11})$$

Einsetzen von A.5 in A.11

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (C' R' + G' L') \frac{\partial I}{\partial t} + G' R' I \quad (\text{A.12})$$

und von A.7 in A.10 liefert:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (C' R' + G' L') \frac{\partial U}{\partial t} + G' R' U \quad (\text{A.13})$$

Die Gleichungen A.12 und A.13 werden als Telegrafengleichungen bezeichnet. Es sind verallgemeinerte Wellengleichungen. Für verlustlose Leitungen mit  $R' = 0$  und  $G' = 0$  ergeben sich die klassischen Wellengleichungen. Ein Ansatz zur Lösung der Telegrafengleichung ist:

$$U(z, t) = U e^{i\omega t - \gamma z} \quad (\text{A.14})$$

$$I(z, t) = I e^{i\omega t - \gamma z} \quad (\text{A.15})$$

Nun wird A.14 in A.7 und A.15 in A.5 eingesetzt:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = (R' + i\omega L') I \quad (\text{A.16})$$

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = (G' + i\omega C') U \quad (\text{A.17})$$

Differenzieren nach  $z$  ergibt:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (R' + i\omega L') \frac{\partial I}{\partial z} \quad (\text{A.18})$$

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = (G' + i\omega C') \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{A.19})$$

Einsetzen von A.17 in A.18 und A.16 in A.19 ergibt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (R' + i\omega L')(G' + i\omega C') U \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = (R' + i\omega L')(G' + i\omega C') I \quad (\text{A.21})$$

A.20 und A.21 haben die Form

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = a^2 y. \quad (\text{A.22})$$

## Anhang A. Leitungsdifferenzialgleichungen

---

A.22 wird gelöst durch

$$y = e^{az}. \quad (\text{A.23})$$

Die Gleichung A.22 hat zwei Lösungen mit

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')} = \pm \gamma \quad (\text{A.24})$$

mit der Abkürzung:

$$\gamma = \sqrt{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')}. \quad (\text{A.25})$$

Die allgemeine Lösung für die Spannung lautet:

$$U(z) = U_f e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z} \quad (\text{A.26})$$

Dabei ist  $U_f$  die Amplitude des vorlaufenden Wellenterms (forwarded) und  $U_r$  die Amplitude des zurücklaufenden Wellenterms (reflected). Die komplexe Zahl  $\gamma$  heißt Ausbreitungsfaktor:

$$\gamma = \alpha + i\beta = \sqrt{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')} \quad (\text{A.27})$$

Der Realteil  $\alpha$  heißt Dämpfungskonstante und der Imaginärteil  $\beta$  Phasenkonstante. Die allgemeine Lösung für den Strom lautet:

$$I(z) = I_f e^{-\gamma z} + I_r e^{\gamma z} \quad (\text{A.28})$$

Die Konstanten  $U_f$ ,  $U_r$ ,  $I_f$  und  $I_r$  sind nicht unabhängig voneinander, sondern über A.16 und A.17 miteinander verknüpft:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = (R' + i\omega L')I \quad (\text{A.29})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z} (U_f e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z}) \quad (\text{A.30})$$

$$= \gamma (U_f e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z}) \quad (\text{A.31})$$

Durch Gleichsetzen der rechten Teile von A.29 und A.31 erhalten wir:

$$(R' + i\omega L')I = \gamma (U_f e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z}) \quad (\text{A.32})$$

Daraus folgt:

$$I = \frac{\gamma (U_f e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z})}{(R' + i\omega L')} \quad (\text{A.33})$$

$$I = \frac{\sqrt{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')} (U_f e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z})}{(R' + i\omega L')} \quad (\text{A.34})$$

$$I = \frac{(U_f e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z})}{\sqrt{\frac{(R' + i\omega L')}{(G' + i\omega C')}}} \quad (\text{A.35})$$

---

Mit der Abkürzung

$$Z_L = \sqrt{\frac{(R' + i\omega L')}{(G' + i\omega C')}} \quad (\text{A.36})$$

erhalten wir:

$$I(z) = \frac{U_f}{Z_L} e^{-\gamma z} - \frac{U_r}{Z_L} e^{\gamma z} \quad (\text{A.37})$$

Für eine verlustlose Leitung gilt entsprechend für  $Z_L$  das bekannte Ergebnis aus 2.1:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (\text{A.38})$$

Die Größe  $Z_L$  heißt **Wellenwiderstand**.  $Z_L$  ist derjenige Widerstand, mit dem die Leitung abgeschlossen werden muss, damit nur eine vorlaufende Welle, also keine Reflexion auftritt.